Równania różniczkowe drugiego rzędu

1 Na stanowisku testowym element układu zawieszenia samochodu zostaje wprowadzony w drgania siłą wymuszającą $R\sin\omega t$. Zawieszenie ma częstotliwość własną ω_0 i współczynnik tłumienia α. Jeżeli $f(t)$ reprezentuje pionową wysokość środka ciężkości zawieszenia nad położeniem równowagi, to zachowanie układu można modelować równaniem

$$f''(t) + \alpha f'(t) + {\omega_0}^2 f(t) = R\sin\omega t.$$

(a) Wykaż, że jeśli po wprawieniu w drgania zawieszenia, siła wymuszająca zostanie wyłączona, to układ w końcu się zatrzyma, gdy $\alpha > 0$.

(b) Co się stanie, gdy $\alpha = 0$?

Odpowiedź **Rozwiązanie**

2 Na stanowisku testowym element układu zawieszenia samochodu zostaje wprowadzony w drgania siłą wymuszającą $R\sin\omega t$. Zawieszenie ma częstotliwość własną ω_0 i współczynnik tłumienia α. Jeżeli $f(t)$ reprezentuje pionową wysokość środka ciężkości zawieszenia nad położeniem równowagi, to zachowanie układu można modelować równaniem:

$$f''(t) + \alpha f'(t) + {\omega_0}^2 f(t) = R\sin\omega t$$

(a) Wykaż, że rozwiązanie ogólne to

$$f(t) = f_c(t) + R\frac{\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)\sin\omega t - \alpha\omega\cos\omega t}{\left(\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)^2 + \alpha^2\omega^2\right)},$$

gdzie $f_c(t)$ to funkcja uzupełniająca, będąca rozwiązaniem równania różniczkowego

$$f''(t) + \alpha f'(t) + {\omega_0}^2 f(t) = 0.$$

(b) Opisz zachowanie układu, gdy $\omega \to \omega_0$ dla:

(i) $\alpha \neq 0$, (ii) $\alpha = 0$.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

3 W obwodzie szeregowym o indukcyjności L henrów (H), pojemności C faradów (F) i rezystancji R omów (Ω), ładunek $q(t)$ kulombów (C) na kondensatorze w danym momencie t (w sekundach) spełnia równanie różniczkowe

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = E(t),$$

gdzie $E(t)$ to zastosowana siła elektromotoryczna (w woltach).
W szczególnym przypadku niech obwód ma $E(t) = 0$ V, $L = 1$ H, $C = 100$ μF, $q(0) = q_0$ oraz $\frac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ dla $t = 0$.

(a) Wykaż, że jeśli $R = 0$, to prąd jest sinusoidalny o częstotliwości $15{,}9$ Hz.

(b) Wykaż, że jeśli $r = 200\ \Omega$, to ładunek na kondensatorze wyraża się wzorem

$$q(t) = q_0 e^{-100t}(100t + 1).$$

(c) W części (b) ładunek na kondensatorze spadł o połowę wartości w czasie około $0{,}02$ sekundy. Zastosuj metodę Newtona-Raphsona, aby obliczyć lepsze przybliżenie tego czasu z dokładnością do 3 cyfr znaczących.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

4 Jeśli ciało o masie m zostanie wyrzucone w powietrze pionowo do góry, a jego wysokość w chwili t wynosi $y(t)$, to:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -mg,$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim i przyjmuje się, że nie występuje opór powietrza.
(a) Dlaczego prawa strona równania jest ujemna?
(b) Wykaż, że rozwiązaniem tego równania jest:

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + At + B,$$

gdzie A i B to stałe całkowania.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

Odpowiedzi

1 (b) Zawieszenie nadal wibruje z częstotliwością własną, czyli ω_0.

Pytanie **Rozwiązanie**

2 (b) Kiedy $\omega \to \omega_0$ dla:

(i) $\alpha \neq 0$, to $f(t) = f_c(t) - R\dfrac{\cos \omega_0 t}{\alpha\omega_0}$;

(ii) $\alpha = 0$, to $f(t)$ rośnie i wzrasta amplituda drgań.

Pytanie Rozwiązanie

3 (c) $t = 0{,}016$ sekundy

Pytanie Rozwiązanie

4 (a) Wraz ze wzrostem wysokości ciała, prędkość maleje, a więc $\dfrac{dy}{dt}$ jest ujemne. Wielkość przyspieszenia wynosi wtedy

$\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{dy}{dt}\right) = -\dfrac{d^2y}{dt^2}$, co jest równe g,

zatem $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg$.

Jeśli ciało spada, to prędkość rośnie, ale $y(t)$ maleje, a więc $\dfrac{dy}{dt}$ jest ponownie ujemne.

Pytanie Rozwiązanie

Rozwiązania

1 (a) Załóżmy, że siła wymuszająca zostaje wyłączona w momencie $t = 0$, aby kolejny ruch opisywało równanie

$f''(t) + \alpha f'(t) + {\omega_0}^2 f(t) = 0.$

Rozwiązanie tego równania otrzymujemy z równania charakterystycznego

$m^2 + \alpha m + {\omega_0}^2 = 0,$

które ma dwa pierwiastki

$m = \dfrac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4{\omega_0}^2}}{2}.$

Przypadek 1: $\alpha > 2\omega_0$

Tutaj $\alpha^2 - 4{\omega_0}^2 > 0$, niech więc $\alpha^2 - 4{\omega_0}^2 = k^2$, gdzie $k > 0$ jest liczbą rzeczywistą.

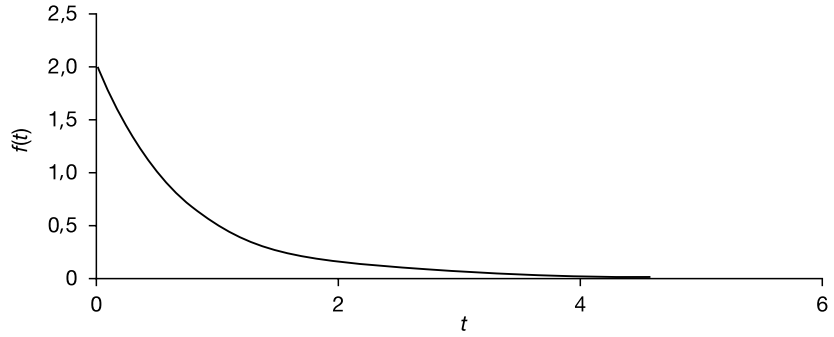
Zatem

$$m = \frac{-\alpha \pm k}{2},$$

a rozwiązaniem równania różniczkowego jest

$$f(t) = ae^{-(\alpha+k)t/2} + be^{-(\alpha-k)t/2}.$$

Oczywiście $\alpha > k$, więc oba wykładniki potęgowe będą ujemne, a wraz ze wzrostem czasu wartość $f(t)$ będzie się zmniejszać – ruch zaniknie bez dalszych wibracji. Jest tak, bo $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

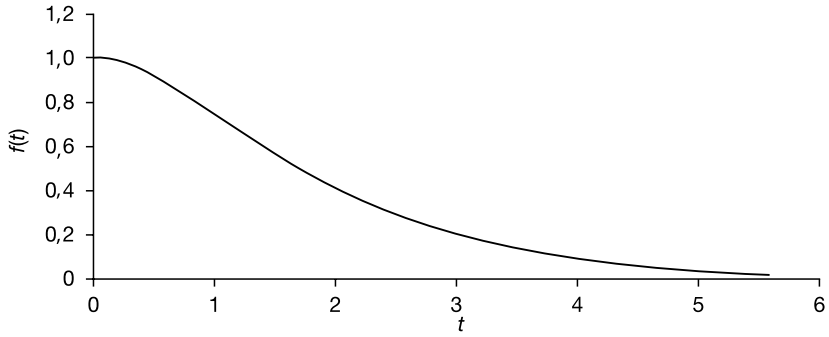


Przypadek 2: $\alpha = 2\omega_0$

Tutaj $\alpha^2 - 4{\omega_0}^2 = 0$, zatem $m = \frac{-\alpha}{2}$, a rozwiązaniem równania różniczkowego jest

$$f(t) = (a + bt)e^{-\alpha t/2}.$$

Ponownie wraz ze wzrostem czasu wartość $f(t)$ będzie się zmniejszać – ruch zaniknie bez dalszych wibracji.



Przypadek 3: $\alpha < 2\omega_0$

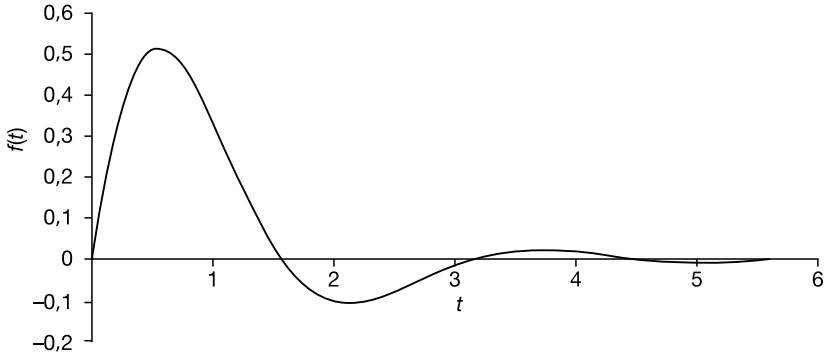
Tutaj $\alpha^2 - 4{\omega_0}^2 < 0$, niech więc $\alpha^2 - 4{\omega_0}^2 = -k^2$, gdzie $k > 0$ jest liczbą rzeczywistą. Zatem

$$m = \frac{-\alpha \pm ik}{2},$$

a rozwiązaniem równania różniczkowego jest

$$f(t) = e^{-\alpha t/2}\left(ae^{ikt/2} + be^{-ikt/2}\right) = Ce^{-\alpha t/2}\sin(kt/2 + \beta).$$

Tutaj wraz ze wzrostem czasu wartość $f(t)$ będzie się zmniejszać – ruch zaniknie, ale tym razem oscylacja będzie kontynuowana wraz z zanikiem ruchu.



(b) Jeśli $\alpha = 0$, to rozwiązaniem równania różniczkowego jest:

$$f(t) = C\sin(\omega_0 t + \beta).$$

Zatem układ nadal wibruje bez tłumienia z częstotliwością własną, czyli ω_0.

Pytanie **Odpowiedź**

---

2 Funkcja uzupełniająca $f_c(t)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$f''(t) + \alpha f'(t) + {\omega_0}^2 f(t) = 0.$$

Rozwiązaniem równania niejednorodnego jest całka szczególna, która ma postać

$$f_p(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t.$$

Zatem

$$f_p'(t) = \omega C\cos\omega t - \omega D\sin\omega t \text{ oraz } f_p''(t) = -\omega^2 C\sin\omega t - \omega^2 D\cos\omega t.$$

Podstawiając do równania różniczkowego, otrzymujemy

$$-\omega^2 C\sin\omega t - \omega^2 D\cos\omega t + \alpha\omega C\cos\omega t - \alpha\omega D\sin\omega t + {\omega_0}^2 C\sin\omega t + {\omega_0}^2 D\cos\omega t = R\sin\omega t.$$

Więc

$$\left(-\omega^2 C - \alpha\omega D + {\omega_0}^2 C\right)\sin\omega t + \left(-\omega^2 D + \alpha\omega C + {\omega_0}^2 D\right)\cos\omega t = R\sin\omega t + 0\cos\omega t.$$

Teraz porównujemy współczynniki przy cosinusach i sinusach:

$$-\omega^2 C - \alpha\omega D + {\omega_0}^2 C = R$$
$$-\omega^2 D + \alpha\omega C + {\omega_0}^2 D = 0$$

Z tego wynika, że:

$$-\omega^2 CD - \alpha\omega D^2 + {\omega_0}^2 CD = RD$$
$$-\omega^2 DC + \alpha\omega C^2 + {\omega_0}^2 DC = 0, \text{ zatem } -\alpha\omega\left(D^2 + C^2\right) = RD$$
$$-\omega^2 C^2 - \alpha\omega DC + {\omega_0}^2 C^2 = RC$$
$$-\omega^2 D^2 + \alpha\omega CD + {\omega_0}^2 D^2 = 0, \text{ zatem } \left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)\left(D^2 + C^2\right) = RC$$

Z tych dwóch równań widzimy, że

$$\frac{-\alpha\omega}{{\omega_0}^2-\omega^2}=\frac{D}{C}, \text{ więc } D=\frac{-\alpha\omega C}{{\omega_0}^2-\omega^2}.$$

Podstawienie do równania $-\omega^2 C-\alpha\omega D+{\omega_0}^2 C=R$ daje

$$C=\frac{R}{\left({\omega_0}^2-\omega^2+\dfrac{\alpha^2\omega^2}{{\omega_0}^2-\omega^2}\right)}, \text{ a zatem } D=\frac{-\alpha\omega R}{\left(({\omega_0}^2-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2\right)}.$$

Dlatego całka szczególna to

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \frac{R\sin\omega t}{\left({\omega_0}^2-\omega^2+\dfrac{\alpha^2\omega^2}{{\omega_0}^2-\omega^2}\right)}-\frac{\alpha\omega R\cos\omega t}{\left(({\omega_0}^2-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2\right)} \\ &= R\frac{\left({\omega_0}^2-\omega^2\right)\sin\omega t-\alpha\omega\cos\omega t}{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem ogólnym jest zatem

$$f(t)=f_c(t)+R\frac{\left({\omega_0}^2-\omega^2\right)\sin\omega t-\alpha\omega\cos\omega t}{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2}.$$

(b) Kiedy $\omega\to\omega_0$ dla:

(i) $\alpha\neq 0$, to

$$\begin{aligned} f(t) &= f_c(t)+R\frac{\left({\omega_0}^2-\omega^2\right)\sin\omega t-\alpha\omega\cos\omega t}{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2} \\ &\to f_c(t)+R\frac{-\alpha\omega_0\cos\omega_0 t}{(\alpha^2{\omega_0}^2)} \\ &= f_c(t)-R\frac{\cos\omega_0 t}{\alpha\omega_0}. \end{aligned}$$

(ii) $\alpha=0$, to

$$\begin{aligned} f(t) &= f_c(t)+R\frac{\left({\omega_0}^2-\omega^2\right)\sin\omega t}{({\omega_0}^2-\omega^2)^2} \\ &\to f_c(t)+R\frac{\sin\omega t}{{\omega_0}^2-\omega^2}. \end{aligned}$$

Zatem jeśli $\omega\to\omega_0$, to $f(t)$ rośnie i wzrasta amplituda drgań.

Pytanie **Odpowiedź**

---

3 (a) Mamy rozwiązać równanie różniczkowe $Lq''(t)+Rq'(t)+\dfrac{q(t)}{C}=E(t)$, gdzie $E(t)=0\,\text{V}$, $L=1\,\text{H}$ i $C=100\,\mu\text{F}=10^{-4}\,\text{F}$.

Oznacza to, że musimy rozwiązać

$q''(t)+Rq'(t)+10\,000q(t)=0.$

Równanie charakterystyczne ma postać $m^2 + Rm + 10\,000 = 0$, skąd

$$m = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 40\,000}}{2}.$$

Oznaczmy te rozwiązania przez m_1, m_2.

Zatem rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego jest

$$q(t) = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t} \text{ dla } m_1 \neq m_2$$
$$\text{oraz } \quad q(t) = (A + Bt)e^{mt} \text{ dla } m_1 = m_2 = m.$$

Jeśli $R = 0$, to $m = \dfrac{\pm\sqrt{-40\,000}}{2} = \pm 100i$, co daje

$$q(t) = Ae^{100it} + Be^{-100it},$$

czyli prąd jest sinusoidalny o częstotliwości $\dfrac{100}{2\pi} = 15{,}9$ Hz.

(b) Jeśli $R = 200\,\Omega$, to $m = \dfrac{-200 \pm \sqrt{40\,000 - 40\,000}}{2} = -100 = m_1 = m_2$, co daje

$$q(t) = (A + Bt)e^{-100t}.$$

Stosując warunki brzegowe, widzimy, że $q(0) = A = q_0$ oraz że

$$q'(t) = Be^{-100t} - 100(A + Bt)e^{-100t},$$

a zatem $q'(0) = B - 100A = 0$, dlatego $B = 100q_0$, dając

$$q(t) = q_0(1 + 100t)e^{-100t}.$$

(c) Musimy znaleźć rozwiązanie równania

$$q_0(1 + 100t)e^{-100t} = \frac{q_0}{2},$$

czyli $f(t) = (1 + 100t)e^{-100t} - \dfrac{1}{2} = 0.$

Mamy $f'(t) = -100(1 + 100t)e^{-100t} + 100e^{-100t} = -10\,000te^{-100t}$.

$t_0 = 0{,}02$ jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania.

Lepsze przybliżenie możemy znaleźć, stosując metodę Newtona-Raphsona:

$$t_1 = t_0 - \frac{f(t_0)}{f'(t_0)},$$

czyli $t_1 = 0{,}02 - \dfrac{-0{,}09399}{-27{,}067} = 0{,}0165$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku.

Jeszcze lepsze przybliżenie uzyskamy ponownie, stosując metodę Newtona-Raphsona:

$$t_2 = t_1 - \frac{f(t_1)}{f'(t_1)},$$

czyli $t_2 = 0{,}0165 - \dfrac{0{,}00893}{31{,}688} = 0{,}0162$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku.

Ta poprawa dotyczyła tylko czwartego miejsca po przecinku, więc rozwiązanie do trzech miejsc po przecinku jest następujące:

$t = 0{,}016$ sekundy.

Pytanie **Odpowiedź**

---

4 (b) Obie strony równania $m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -mg$ dzielimy przez m, a następnie całkujemy względem czasu t.
Otrzymujemy:

$$\int \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t = -g\,\mathrm{d}t, \text{ czyli } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -gt + A,$$

gdzie A jest stałą całkowania.

Całkowanie obu stron po raz drugi względem czasu t daje:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\int gt\,\mathrm{d}t + \int A\,\mathrm{d}t, \text{ czyli } y(t) = -\frac{gt^2}{2} + At + B,$$

gdzie B jest stałą całkowania.

Pytanie **Odpowiedź**
